

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

5 – 6 КЛАСС

1. В компании из пяти человек каждый является либо рыцарем, либо лжецом. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда говорят неправду. По вопросу о том, сколько имеется рыцарей в компании, каждый сделал по одному заявлению. Первый сказал, что число рыцарей в компании чётно, второй сказал, что оно нечётно. Третий сказал, что число рыцарей делится на три, четвёртый сказал, что оно не делится на три. Наконец, пятый сказал, что число рыцарей делится на четыре. Можно ли по этим данным однозначно определить, сколько в компании было рыцарей, и сколько лжецов?
2. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой — два камня, а во второй — один камень. У каждого игрока имеется неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в три раза число камней в какой-либо кучке, или добавляет два камня в одну из куч. Выигрывает тот игрок, после хода которого в обеих кучках в сумме станет не менее 15 камней. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате 10×10 , чтобы в каждом квадрате 3×3 была ровно одна закрашенная клетка?
4. Решить числовой ребус $\text{ПИОН} \times 4 = \text{ПОНИ} \times 3$, где разным буквам П, И, О, Н сопоставлены разные цифры. (Оба числа являются четырёхзначными.)
5. На плоскости есть 6 отрезков, никакие два из которых не параллельны. На каждом из этих отрезков отмечены точки пересечения с другими отрезками, при этом никакие три отрезка не пересекаются в одной точке. Известно, что на первом отрезке отмечены 3 точки, на втором 4, ещё на трёх по 5 точек. Сколько точек отмечено на последнем отрезке?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

7 КЛАСС

1. Пятерым детям выдавали конфеты. Сначала первому из них было выдано сколько-то конфет. Потом каждому следующему давали больше, чем предыдущему, с таким расчётом, чтобы дети в любой момент могли разделить поровну все полученные конфеты между теми, кому они на данный момент были выданы. Требуется придумать пример такой раздачи конфет, то есть указать, кому и сколько было выдано, чтобы все указанные свойства выполнялись.
2. В некотором царстве имеется 9 городов. Некоторые из них соединены дорогой (не обязательно прямолинейной). При этом из пяти городов выходит по 4 дороги, а из остальных четырёх городов — по 3 дороги. Может ли быть так, что все эти города нельзя объехать по дорогам, вернувшись назад, и при этом не проезжая несколько раз через один и тот же город? (Дороги в промежуточных точках не могут пересекаться.)
3. Алиса выписывает на доске двузначные числа, причем каждое следующее больше предыдущего, и оно начинается с цифры, на которую заканчивалось предыдущее. Какое максимальное количество чисел может быть выписано на доске?
4. Решить числовой ребус $\text{ПИОН} \times 4 = \text{ПОНИ} \times 3$, где разным буквам П, И, О, Н сопоставлены разные цифры. (Оба числа являются четырёхзначными.)
5. Дан квадрат 4×4 , разбитый на единичные квадратики. В квадратиках разрешается провести одну из диагоналей таким образом, чтобы проведённые линии нигде не пересекались (даже в вершинах). Какое максимальное число диагоналей удастся провести?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

8 КЛАСС

1. Семерым детям выдавали конфеты. Сначала первому из них было выдано сколько-то конфет. Потом каждому следующему давали больше, чем предыдущему, с таким расчётом, чтобы дети в любой момент могли разделить поровну все полученные конфеты между теми, кому они на данный момент были выданы. Требуется придумать пример такой раздачи конфет, то есть указать, кому и сколько было выдано, чтобы все указанные свойства выполнялись.
2. В ряд выстроились 100 человек. Каждый среди них – либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда говорит неправду. Каждый из них сказал, что левее от него лжецов больше, чем рыцарей правее от него. Сколько в ряду лжецов и сколько рыцарей?
3. Имеется $n \geq 3$ одинаковых шаров и три пронумерованных ящика. Сравнивается число способов разложить шары по ящикам так, чтобы пустых ящиков при этом не оказалось, и число способов разложить шары так, что ровно один из ящиков окажется пустым. При каких значениях n то и другое число способов будет одинаковым?
4. Дан клетчатый прямоугольник 1×2016 . Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может покрасить клетки какого-то прямоугольника 1×1 , 1×3 или 1×5 клеток (два раза красить одну и ту же клетку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?
5. Можно ли нарисовать на плоскости четыре квадрата и две перпендикулярные прямые так, чтобы квадраты не имели общих точек пересечения, и каждая прямая пересекала каждый квадрат по отрезку?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

9 КЛАСС

1. Артур написал на доске некоторое число N и умножил его на каждое из чисел 6, 9 и 13. После этого он обнаружил, что в записи чисел $6N$, $9N$, $13N$ каждая из десяти цифр встречается ровно один раз. Какое число написал Артур?

2. Числа a , b , c неотрицательны. Доказать неравенство

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c).$$

3. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 30 градусам, а угол при вершине B равен 80 градусам. Внутри треугольника выбрана точка M такая, что треугольник BCM является правильным. Найти величину угла MAB .
4. Числа 1, 2, ..., 50 разбили на 10 пятёрок, и в каждой пятёрке взяли среднее по величине число. Взятые 10 чисел просуммировали. Какое наименьшее и какое наибольшее значение при этом могло получиться?
5. Найти площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $17x + 45 = 17y + 5xy$.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

10 КЛАСС

1. Уравнение $(x + 3a)(x + 3b) = 25$ имеет корень $x = a + b$. Доказать, что $ab \leq 1$.
2. Имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Известно, что для любого k от 1 до n сумма первых k членов этой последовательности делится на k . Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности?
3. Четырехзначное число делится на 9, и сумма его тысяч и сотен в два раза меньше суммы цифр десятков и единиц. Сколько существует таких чисел? Каковы минимальное и максимальное из них?
4. Окружности ω_1 и ω_2 , радиусы которых равны 9 и 16 соответственно, касаются друг друга внешним образом в точке A . На окружности ω_1 выбрана точка B на расстоянии 9 от A . Из этой точки проведена касательная к окружности ω_2 . Найти длину отрезка касательной.
5. Имеется доска 40×40 , клетки которой раскрашены в шахматном порядке, и много бумажных полосок, состоящих из пяти клеток того же размера, что и клетки доски. Каким наименьшим количеством полосок можно накрыть все белые клетки доски (полоски могут перекрываться и вылезать за край доски)?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

11 КЛАСС

1. Придумать пример функции $f(x)$, определённой на всей числовой прямой, для которой выполняется тождество

$$f(2x + 1) + f(3x - 2) = x^2 + x + 1.$$

2. Имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Известно, что для любого k от 1 до n сумма первых k членов этой последовательности делится на k . Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности?
3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опущена высота CH . В треугольники ACH и BCH вписаны окружности; O_1 и O_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC . Доказать, что прямые O_1P_1 и O_2P_2 пересекаются на гипотенузе AB .
4. Решить в целых числах уравнение $2x^2 = 3y^2 + 5xy + x + 4y + 20$.
5. В состязании принимает участие 2016 школьников. В каждом раунде все школьники делятся на две команды, с равным количеством участников. Найти минимальное число происходящих раундов, чтобы любые два школьника по крайней мере в одном раунде были в разных командах.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для решения задачи, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и плохо поддается формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Многие задачи данного тура близки к типовым школьным задачам, поэтому их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Конкретные предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В логических задачах 1 V-VI классов, а также задаче 2 VIII класса важно обращать внимание на полноту логического обоснования выводов. Просто верные ответы без достаточного обоснования оцениваются не более чем двумя баллами. За мелкие недочёты в обосновании можно вычитать 1 - 2 балла.

В задаче 2 V-VI класса достаточно предъявить пример выигрышной стратегии первого игрока с хотя бы кратким объяснением того, почему она ведёт к победе. Просто ответ без объяснений баллами не оценивается.

Задача 3 V-VI класса, а также задача 5 VII и X классов относятся к типу "оценка+пример". За каждую часть даётся 3-4 балла. Построение примера рекомендуем оценивать 3 баллами, доказательство его оптимальности 4 баллами.

В числовом ребусе, задаче 4 V-VII классов, получение ответа с проверкой того, что он подходит, оценивается 2 баллами. При наличии анализа вариантов количество баллов увеличивается вплоть до 7 – в случае доказательства единственности ответа.

В задаче 5 V-VI классов важна логическая полнота излагаемого решения. Ответ без обоснования не оценивается баллами.

В задаче 1 VI-VIII класса достаточно предъявить подходящий пример (с проверкой того, что он удовлетворяет условию). Полный анализ здесь не требуется.

В задаче 2 VII класса также достаточно правильно найденного примера (описания или рисунка).

В задаче 3 VII класса требуется не только верный ответ (до 2 баллов), но и полное доказательство того, что большее количество чисел выписать нельзя.

В задаче VIII класса баллы даются за нахождение числа вариантов для каждого из двух случаев (скажем, по 3 балла за то и другое). Дополнительный балл — за верное сравнение чисел и правильный ответ.

В задаче 4 VIII класса должно быть точное описание стратегии с доказательством. Частичные баллы здесь можно присуждать разве что в виде большого исключения.

В задаче 5 VIII класса годится как рисунок, так и словесное описание построения.

В задаче 1 IX класса за нахождение примера даётся до 3 баллов. Остальные баллы — за проверку того, что других вариантов нет.

Задачи 2 и 3 того же класса оцениваются по обычным школьным критериям.

В задаче 4 IX класса за нахождение верного значения минимального или максимального значения суммы можно присуждать до 5 баллов при наличии полного доказательства.

В задаче 5 IX класса за полное решение диофантова уравнения можно присуждать до 5 баллов, и ещё 2 балла за верное нахождение площади.

В задачах 1 и 4 X класса, а также 1 и 3 XI класса, критерии обычные школьные.

Задача 2 обоих классов предполагает нахождение примера (1 балл), а также оценку средних величин, если именно такой ход решения используется. За доказательство возрастания последовательности средних, или за какой-то его эквивалент, можно дополнительно присуждать до 3-4 баллов.

В задаче 3 X класса до 5 баллов присуждается при условии верного ответа с полным доказательством для количества чисел. За выделение из них минимального и максимального — по одному дополнительному баллу.

В задаче 4 XI класса до трёх баллов можно присуждать за представление уравнения в виде произведения двух линейных выражений, равных константе. Ещё один балл — за указание решения (каким способом оно найдено, не важно, так как само его наличие не очевидно). Остальные баллы — за полный анализ с доказательством того, что других решений нет.

В задаче 5 XI класса до трёх баллов даётся за верное обоснование того, что 10 раундов не достаточно. Остальные баллы — за чёткое обоснование того, что 11 раундов достаточно.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

5 – 6 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

Первые два дали противоположные ответы. Один из них правдив, другой нет. Значит, среди первых двух есть один рыцарь и один лжец. Аналогично для третьего и четвёртого. Таким образом, у нас уже есть два рыцаря и два лжеца, а пятый то ли рыцарь, то ли лжец. В любом случае получается, что рыцарей два или три, и их число на 4 не делится. Значит, пятый солгал. Итого у нас два рыцаря и три лжеца.

Можно дополнительно заметить, что рыцарями будут первый и четвёртый: их ответы были правдивыми.

2. Ответ: выигрывает первый.

Покажем, как ему надо играть. Пусть первый игрок добавил два камня в первую кучку. Получилась позиция (4,1). Из неё второй игрок может получить одну из трёх позиций: (12,1), (6,1) или (4,3). Выигрыша пока нет, и тогда первый игрок утраивает число камней в большей кучке, получая в сумме как минимум 15.

Заметим, что указанная выигрышная стратегия не является единственной. Можно было также первым ходом перейти к позиции (2,3).

3. Ответ: 9 клеток.

Прежде всего, в квадрате 10×10 содержится 9 попарно не пересекающихся квадратов размером 3×3 . Поэтому менее чем 9 закрашенными клетками не обойтись. Далее, если закрасить клетки (3,3), (3,6), (3,9), (6,3), (6,6), (6,9), (9,3), (9,6), (9,9) общим количеством 9, то этого будет достаточно. Цифры здесь указывают номера строки и столбца соответственно.

4. Ответ: П=1, О=2, Н=6, И=9.

Для удобства переименуем буквы П, И, О, Н в a , b , c , d . Равенство из условия примет вид $4(1000a + 100b + 10c + d) = 3(1000a + 100c + 10d + b)$, то есть

$1000a + 397b = 260c + 26d$. Ввиду того, что c и d — цифры, правая часть меньше 3000. Поэтому $a < 3$. Рассмотрим два случая.

Пусть $a = 1$. Заметим, что число 1001 делится на 13. Из равенства $1000 + 397b = 260c + 26d$ следует, что $7b - 1 = 260c + 26d - 390b - 1001$, где правая часть делится на 13. Тогда левая часть тоже делится на 13, и подходит только одно значение $b = 2$. Теперь сократим на 13 предыдущее равенство, получая $1 = 20c + 2d - 60 - 77$, то есть $10c + d = 69$. Это значит, что $c = 6$, $d = 9$.

Теперь пусть $a = 2$. Из равенства $2000 + 397b = 260c + 26d$ следует, что $7b - 2 = 260c + 26d - 390b - 2002$, и теперь подходит только значение $b = 4$, при котором $7b - 2$ делится на 13. Здесь после сокращения обеих частей равенства на 26 получается $1 = 10c + d - 60 - 77$, то есть $10c + d = 138$, что невозможно ввиду того, что левая часть не превосходит 99.

Таким образом, числовой ребус имеет в точности одно решение.

5. Ответ: 4 точки.

Первый отрезок пересекается с тремя из оставшихся, поэтому не пересекается с двумя из них. Поскольку на 3-м, 4-м и 5-м отрезках отмечено по 5 точек, они пересекаются со всеми остальными. Значит, первый отрезок не пересекается со вторым и с шестым.

На втором отрезке отмечено 4 точки, то есть он пересекается со всеми отрезками кроме одного (первого). В частности, он пересекается с шестым отрезком. В итоге получаем, что 6-й отрезок не пересекается только с первым, и тогда на нём отмечены 4 точки.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

7 класс (решения)

1. Предъявим такой простой пример: количество выданных конфет равно 1, 3, 5, 7, 9. Тогда сумма первых двух чисел делится на 2, сумма первых трёх делится на 3, сумма первых четырёх делится на 4, а сумма всех пяти делится на 5. Именно это и требовалось. Разумеется, такой пример не единственный.
2. Опишем пример словесно. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$. Проведём в нём диагонали AC и CE . Вершину B соединим с D и E кривыми, проходящими во внешней части пятиугольника. Рядом нарисует треугольник KLM , и внутри него точку N , соединённую со всеми тремя вершинами. Проведём ещё одно соединение между D и K . Получится, что из городов A, L, M, N выходит по три дороги, а из остальных городов по четыре. Ясно, что объехать все города по циклу не удастся из-за единственной "перемычки" DK между двумя частями.
3. Ответ: 17 чисел.

Рассмотрим такой пример чисел: 11, 12, 22, 23, 33, 34, 44, 45, 55, 56, 66, 67, 77, 78, 88, 89, 99. Их здесь выписано 17. Докажем, что большего количества быть не может. Если с одной и той же цифры начинаются два числа вида \overline{ab} , \overline{ac} , то $b = a$ по условию, то есть у первого числа обе цифры совпадают. В частности, три числа с одной цифры начинаться уже не могут. Цифр всего 9, а с 9 начинаться может не более одного числа. Итого получается не более 17.

4. Ответ: П=1, О=2, Н=6, И=9.

Для удобства переименуем буквы П, И, О, Н в a, b, c, d . Равенство из условия примет вид $4(1000a + 100b + 10c + d) = 3(1000a + 100c + 10d + b)$, то есть $1000a + 397b = 260c + 26d$. Ввиду того, что c и d — цифры, правая часть меньше 3000. Поэтому $a < 3$. Рассмотрим два случая.

Пусть $a = 1$. Заметим, что число 1001 делится на 13. Из равенства $1000 + 397b = 260c + 26d$ следует, что $7b - 1 = 260c + 26d - 390b - 1001$, где правая часть делится на 13. Тогда левая часть тоже делится на 13, и подходит только одно значение $b = 2$. Теперь сократим на 13 предыдущее равенство, получая $1 = 20c + 2d - 60 - 77$, то есть $10c + d = 69$. Это значит, что $c = 6, d = 9$.

Теперь пусть $a = 2$. Из равенства $2000 + 397b = 260c + 26d$ следует, что $7b - 2 = 260c + 26d - 390b - 2002$, и теперь подходит только значение $b = 4$, при котором $7b - 2$ делится на 13. Здесь после сокращения обеих частей равенства на 26 получается $1 = 10c + d - 60 - 77$, то есть $10c + d = 138$, что невозможно ввиду того, что левая часть не превосходит 99.

Таким образом, числовой ребус имеет в точности одно решение.

5. Ответ: 10 диагоналей.

Построить пример с 10 проведёнными диагоналями нетрудно: можно рассмотреть случай, когда все диагонали идут параллельно друг другу, в направлении снизу вверх и слева направо. Пусть в первой и последней строках их имеется по 4, а также проведены диагонали в первой клетке третьей строки и в последней клетке второй строки.

Осталось доказать, что большего количества не достичь. Рассмотрим прямоугольник 2×4 . В нем нельзя провести больше пяти диагоналей, так как каждая диагональ занимает один из пяти узлов средней линии, а пересечений по условию быть не должно. Ввиду того, что квадрат можно разделить на два таких прямоугольника, всего диагоналей оказывается не больше 10.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

8 класс (решения)

1. Предъявим такой простой пример: количество выданных конфет равно 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 соответственно. Легко видеть, что сумма первых k чисел равна k^2 при всех k от 1 до 7, поэтому она делится на k , и выданные на данный момент конфеты могут быть разделены поровну между первыми k детьми. Именно это и требовалось. Разумеется, такой пример не единственный.

2. Ответ: тех и других по 50.

Крайний слева согнал, так как слева от него нет никого, и их не может быть больше даже в том случае, если рыцарей справа вообще нет. Тогда крайний справа сказал правду: справа от него никого нет, а слева точно есть хотя бы один лжец (самый первый). Далее получается, что второй слева согнал: слева от него один лжец, а справа не менее одного рыцаря. Второй справа сказал правду: лжецов левее него как минимум два, а рыцарь правее только один. И так далее. Получается, что слева стоят 50 лжецов, а справа 50 рыцарей.

3. Ответ: при $n = 8$.

Подсчитаем то и другое число способов, а потом сравним. Начнём со второго. Пусть первый ящик пуст, а два других непусты. Тогда их можно заполнить одним из $n - 1$ способов: по принципу $1 + (n - 1)$, или $2 + (n - 2)$, ... , или $(n - 1) + 1$. Столько же способов будет, если пуст только второй, или только третий ящик. Итого $3(n - 1)$.

Теперь найдём число способов заполнения, когда пустых ящиков нет. Можно сразу положить по шару в каждый ящик, и далее останется $n - 3$ шара, которые надо распределить по принципу $x + y + z$, где слагаемые неотрицательны. То есть нас интересует число решений уравнения $x + y + z = n - 3$ в целых неотрицательных числах.

При фиксированном N , число решений уравнения $x + y = N$ с двумя неизвестными равно $N + 1$: это все пары списка $(0, N)$, $(1, N - 1)$, ... , $(N, 0)$, где нумерация идёт от нуля. Полагая $z = 0, 1, \dots, n - 3$ соответственно, мы получаем уравнения вида $x + y = N$ при $N = n - 3, n - 4, \dots, 0$. Количество решений суммируем в обратном порядке: $1 + 2 + \dots + (n - 2) = (n - 2)(n - 1)/2$.

Осталось решить уравнение $3(n-1) = (n-2)(n-1)/2$. После сокращения на $n-1 > 0$ получается $(n-2)/2 = 3$, то есть $n = 8$.

4. Ответ: второй игрок.

Стратегия такова: оставлять противнику полоски только с чётным числом клеток. Изначально это так. После хода первого в пределах одной из полосок, закрашивается нечётное число клеток. Поэтому слева и справа в сумме остаётся нечётное число — с одной стороны полоска нечётной длины, с другой — чётной длины (возможно, нулевой). Тогда второму игроку достаточно в образовавшейся полоске нечётной длины закрасить одну крайнюю клетку.

5. Можно. Опишем построение на координатной плоскости. Проведём две прямые $y = x$ и $y = -x$. Они перпендикулярны. Первый квадрат нарисует сверху. Сделаем это так, чтобы два луча пересекли его по отрезкам. Сделать это можно так, чтобы квадрат был симметричен относительно оси Oy .

Второй квадрат нарисует с правой стороны — достаточно далеко, чтобы он не задевал первый. Он будет симметричен относительно оси Ox .

Теперь третий квадрат рисуем снизу, симметрично относительно Oy , размещая его достаточно далеко, чтобы он не задевал ранее построенные квадраты. Наконец, четвёртый квадрат рисуем симметрично относительно Ox , где-то далеко слева.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: 81.

Сумма цифр чисел $6N$, $9N$, $13N$ равна $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, то есть она делится на 9. Известно, что число при делении на 9 даёт тот же остаток, что и его сумма цифр. Отсюда следует, что $6N + 9N + 13N = 28N$ делится на 9, то есть N кратно 9. Положим $N = 9k$.

Легко видеть, что два первых числа в произведениях трёхзначны, а последнее четырёхзначно – по количеству цифр $3 + 3 + 4 = 10$. Другие варианты невозможны. Тогда $k \geq 9$ за счёт того, что $13N > 1000$, откуда следует $N \geq 77$. Также мы знаем, что $9N < 1000$, откуда $N \leq 111$, то есть $k \leq 12$. Получается совсем небольшое число вариантов.

Случай $k = 9$ удовлетворяет условию: получается $6 \cdot 81 = 486$, $9 \cdot 81 = 729$, и $13 \cdot 81 = 1053$. Случай $k = 10$ невозможен из-за повторения нулей на конце. Случай $k = 11$ ведёт к появлению чисел 594 и 891 с повторениями цифр. При $k = 12$ последнее число равно 1404. Поэтому найденное решение единственно.

2. Заметим, что $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)ab$ за счёт того, что $a^2 - ab + b^2 \geq ab$. Аналогично, $b^3 + c^3 \geq (b + c)bc$ и $a^3 + c^3 \geq (a + c)ac$. Складывая почленно три неравенства, получаем то, что требовалось доказать.

3. Ответ: 20° .

Рассмотрим окружность, описанную около ABC с центром O . Центральный угол BOC равен удвоенному углу BAC , то есть 60 градусам. Это значит, что треугольник BOC правильный. Точка O лежит внутри треугольника ABC , так как он остроугольный. Значит, $M = O$.

Теперь осталось заметить, что величина угла ACB равна $180 - 30 - 80 = 70$ градусам, и центральный угол AMB равен 140 градусам. Поэтому углы при основании равнобедренного треугольника AMB , включая угол MAB , равны $(180 - 140)/2 = 20$ градусам.

4. Ответ: 165 и 345 соответственно.

Пусть $a < b < c$ – первые три числа одной из пятёрок. Тогда $a + 2 \leq c$, $b + 1 \leq c$, откуда $a + b + c + 3 \leq 3c$, то есть $c \geq \frac{a+b+c}{3} + 1$.

Суммируя по всем десяти пятёркам, получаем, что сумма средних чисел не меньше $(1 + 2 + 3 + \dots + 28 + 29 + 30)/3 + 10 = 165$. Здесь мы воспользовались тем, что три наименьших числа, взятые из троек, не могут повторяться, и потому их сумма не меньше 30 первых натуральных чисел.

Пример, когда это значение достигается, строится просто: формируем тройки по принципу 1, 2, 3, затем 4, 5, 6, и так далее до 28, 29, 30. Далее дополняем их до пятёрок произвольным образом. Средние числа троек в сумме дадут $3 + 6 + \dots + 30 = 3(1 + 2 + \dots + 10) = 165$.

Пример с максимальным значением можно отдельно не строить, а воспользоваться соображениями симметрии. Ясно, что если каждое число x заменить на "симметричное" ему число $51 - x$, то средние числа троек перейдут в средние, а их сумма s заменится на $510 - s$. Отсюда ясно, что $510 - 165 = 345$ будет наибольшим значением, и оно достигается.

5. Ответ: площадь равна 30.

Для начала решим уравнение в целых числах. Умножая на 5, имеем $5x \cdot 5y - 17 \cdot 5x + 17 \cdot 5y = 225$, откуда $(5x + 17)(5y - 17) = 225 - 289 = -64$. Целочисленные делители правой части имеют вид $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64$, и в качестве значений для $5x + 17$ (с остатком 2 от деления на 5) подходят только три из них: 2; -8; 32. Им соответствуют значения $x = -3; -5; 3$, для которых значения y равны -3; 5; -3 соответственно.

Таким образом, мы имеем треугольник с вершинами $A(-3; -3)$, $B(-5; 5)$, $C(3; 3)$. Он симметричен относительно прямой $y = -x$, и отрезок BO является медианой и высотой, где O — начало координат. Ясно, что $BO = 5\sqrt{2}$, $AC = 6\sqrt{2}$, откуда площадь равна $S = \frac{1}{2}AC \cdot BO = 30$.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

10 класс (решения)

1. По условию, $(4a + b)(a + 4b) = 25$, то есть $4a^2 + 4b^2 + 17ab = 25$. Применяя известное неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, равносильное $(a - b)^2 \geq 0$, получаем $25 \geq 8ab + 17ab = 25ab$, что и означает $ab \leq 1$.
2. Ответ: n^2 .

Рассмотрим среднее арифметическое $s_k = \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$ первых k членов последовательности. Оно не превосходит a_k , и потому строго меньше a_{k+1} при $k < n$. Следовательно, $a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} = ks_k + a_{k+1} > (k+1)s_k$, то есть $s_{k+1} > s_k$. Это значит, что последовательность средних также строго возрастает.

По условию, все числа последовательности $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ являются целыми. Значит, k -й член этой последовательности не меньше k . В частности, $s_n \geq n$, то есть $a_1 + \dots + a_n \geq n^2$. Пример с числами $a_1 = 1, a_2 = 3, \dots, a_k = 2k - 1, \dots, a_n = 2n - 1$ превращает неравенства в равенства со средними значениями $s_k = k$, представляющими собой целые числа. Отсюда следует, что наименьшее значение суммы равно n^2 , и оно достигается.

3. Ответ: 72 числа; минимальное 1206; максимальное 9099.

Пусть число имеет вид \overline{abcd} . По условию, $2(a + b) = c + d$, причём сумма цифр $a + b + c + d = 3(a + b)$ делится на 9. Отсюда следует, что $a + b$ делится на 3. Ясно, что эта величина не равна нулю, и она не превосходит 9, так как $c + d \leq 18$.

Если $a + b = 3$, то для \overline{ab} получается три варианта: 12, 21, 30. Каждому из них соответствует равенство $c + d = 6$, у которого имеется 7 решений. Это даёт 21 число \overline{abcd} .

При $a + b = 6$ имеется 6 вариантов, и каждому из них соответствует одно из 7 решений уравнения $c + d = 12$. Это добавляет ещё 42 числа.

Наконец, при $a + b = 9$ вариантов 9, и чисел столько же ввиду $c + d = 9$.

Итого получается $21 + 42 + 9 = 72$ числа. Минимальное значение равно 1206, максимальное равно 9099.

4. Ответ: 15.

Пусть O_1, O_2 – центры окружностей. Проведём луч BA до пересечения с ω_2 в точке C . Рассмотрим преобразование подобия (гомотетию) с центром A , при котором O_1 переходит в O_2 . Ясно, что окружности отобразятся друг на друга, и B перейдёт в C . То есть AO_1B подобен AO_2C , и отношение $AC : AB$ равно отношению радиусов $16 : 9$. Отсюда $AC = 16$ и $BC = 9 + 16 = 25$.

Применим теорему о касательной и секущей, согласно которой квадрат длины касательной из точки B равен $BA \cdot BC = 9 \cdot 25 = 15^2$. Следовательно, длина отрезка касательной равна 15.

5. Ответ: 268 полосок.

Рассмотрим такой план, когда в каждой строке 6 полосок покрывают по 3 белых клетки каждая. Это позволяет покрыть все белые клетки прямоугольника 40×36 , используя 240 полосок. Остаётся прямоугольник 40×4 , который по тому же принципу начинаем покрывать по столбцам. Тратя по 6 полосок на каждую из четырёх вертикалей, мы оставляем непокрытыми белые клетки квадрата 4×4 . Их можно покрыть 4 полосками, и общее количество полосок составит $240 + 24 + 4 = 268$.

Покажем, что меньшим числом не обойтись. Для этого выделим некоторое количество белых клеток таким образом, что никакая полоска не может покрыть более одной выделенной клетки. Берём белую диагональ с 40 клетками. Параллельно ей идут две белые диагонали из 34 клеток; далее – диагонали из 28 клеток, и так далее до диагоналей из 4 клеток. При этом расстояние между ближайшими выделенными клетками в строке или столбце составляет 6, и их одной полоской не накрыть. Всего при этом выделено $2 \cdot (4 + 10 + 16 + 22 + 28 + 34) + 40 = 268$ клеток. Значит, это количество будет наименьшим возможным.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2016 – 2017 учебный год

11 класс (решения)

1. Будем искать функцию в виде $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f(2x+1) + f(3x-2) = 13ax^2 + (5b-8a)x + 5a-b+2c$. Решая систему из трёх уравнений $13a = 5b-8a = 5a-b+2c = 1$, находим $a = \frac{1}{13}$, $b = \frac{21}{65}$, $c = \frac{61}{130}$.

2. Ответ: n^2 .

Рассмотрим среднее арифметическое $s_k = \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$ первых k членов последовательности. Оно не превосходит a_k , и потому строго меньше a_{k+1} при $k < n$. Следовательно, $a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} = ks_k + a_{k+1} > (k+1)s_k$, то есть $s_{k+1} > s_k$. Это значит, что последовательность средних также строго возрастает.

По условию, все числа последовательности $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ являются целым. Значит, k -й член этой последовательности не меньше k . В частности, $s_n \geq n$, то есть $a_1 + \dots + a_n \geq n^2$. Пример с числами $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, ..., $a_k = 2k-1$, ..., $a_n = 2n-1$ превращает неравенства в равенства со средними значениями $s_k = k$, представляющими собой целые числа. Отсюда следует, что наименьшее значение равно n^2 , и оно достигается.

3. Пусть P – точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC , с гипотенузой AB . Треугольники ACH и CBH подобны ABC . Преобразование подобия, при котором ABC переходит в ACH , переводит точку касания P в точку P_1 . Поэтому $CP_1 : P_1A = BP : PA$. Отсюда следует, что PP_1 параллельна BC . Аналогично, PP_2 параллельна AC . В частности, PP_1 перпендикулярна BC , и потому проходит через O_1 . Аналогично, PP_2 проходит через O_2 . Поэтому O_1P_1 и O_2P_2 пересекаются в точке P на стороне AB .

4. Ответ: $(x, y) = (8, 2)$ – единственное решение.

Попробуем преобразовать запись уравнения так, чтобы оно приняло вид $(2x + y + a)(x - 3y + b) = c$ для некоторых целых констант a, b, c . После раскрытия скобок получится $2x^2 - 3y^2 - 5xy + (a+2b)x + (b-3a)y + ab = c$, откуда $a+2b = -1$, $b-3a = -4$. Подходят $a = 1$, $b = -1$. Уравнение принимает вид $(2x + y + 1)(x - 3y - 1) = 19$. Ввиду простоты числа 19, возможные значения сомножителей дают 4 случая.

Чтобы упростить вычисления, обозначим сомножители через k_1 и k_2 . Тогда $2x + y = k_1 - 1$, $x - 3y = k_2 + 1$, и потому $2x - 6y = 2k_2 + 2$. Вычитая из первого последнее, приходим к равенству $7y = k_1 - 2k_2 - 3$. Проверяя 4 возможных пары (k_1, k_2) из списка $(19, 1)$, $(-19, -1)$, $(1, 19)$, $(-1, -19)$, видим, что только первый случай даёт целочисленное значение $y = 2$; при этом $x = 8$. Это даёт единственное решение в целых числах.

5. Ответ: 11 раундов.

Задача напоминает известный сюжет с угадыванием задуманного числа за минимальное количество вопросов. Здесь, как и при угадывании числа от 1 до 2010, требуется 11 раундов – из тех соображений, что 2016 не превосходит 2 в степени 11.

Прежде всего, покажем, что 10 раундов не достаточно. После первого раунда выделим 1008 участников, которые составляли одну команду. Во втором раунде они как-то распределятся на две части, из которых мы возьмём максимальную по численности. У нас получится 504 участника, которые в обоих раундах играли в одной и той же команде. Далее будет 252, потом 126, 63, 32, и так далее. На десятом шаге получатся два школьника, которые всё время играли вместе.

Теперь укажем способ разбиения для 11 раундов. Задача была бы проще, если бы число участников равнялось степени двойки. Тогда мы выдали бы каждому школьнику 11-разрядный двоичный код и провели i -й раунд так, чтобы любые двое, у которых i -е разряды различаются, попали в разные команды. Это возможно, так как количество тех, у кого в i -м разряде наличествует 0, равно количеству тех, у кого там имеется 1. В случае 2016 участников это уже не так, поэтому нужно описать подходящий способ выдачи двоичных кодов.

Рассмотрим таблицу из 2048 строк, у которой строки представляют собой всевозможные наборы из 11 двоичных символов 0 или 1. Перечислим их в естественном порядке (от 0...0 до 1...1). Легко видеть, что таблица "антисимметрична" относительно середины: любой столбец, будучи "отражён" от этой середины, переходит в противоположный. Из этого следует, что если мы в середине таблицы удалим 32 лишних строк (16 в первой половине, и 16 во второй), то во всех разрядах будет соблюлён баланс нулей и единиц по их количеству. И тогда работает предыдущий способ разбиения на команды для каждого из раундов. Все коды различны, поэтому в каком-то из раундов, где разряды отличаются, два программиста попадут в разные команды.